ISSN 2357-724X DOI: http://dx.doi.org/10.5965/2357724X112023e0009

**Relato de Experiência**

# Entre algébricos e transcendentes: uma experiência de ensino de números irracionais na formação inicial do professor de matemática

## Between algerics and transcendents: an experience of teaching irrational numbers in the initial education of the mathematics teacher

## Entre algérica y trascendentes: una experiencia de enseñanza de números irracionales en la formación inicial del maestro de matemáticas

Lauro Chagas e Sá[1]
[0000-0003-1820-4856]
Caroline Lima[2]
[0000-0001-9232-6603]

**Resumo**
Há mais de um século, a comunidade acadêmica tem se preocupado com a formação de professores de Matemática, que acontece isolada da prática de sala de aula da escola básica por muitas vezes. Quando se trata dos números irracionais, a situação não é diferente. Na perspectiva de modificar esse cenário, objetivamos, neste relato de experiência, promover um debate sobre o conhecimento de conteúdo dos números irracionais, a partir da leitura de textos específicos e de uma atividade didática com alunos de uma universidade pública. O trabalho foi realizado com dezessete alunos da disciplina "Matemática na Escola", dos quais quinze eram licenciandos e dois cursavam bacharelado. Em dois dias de intervenção, a observação colaborativa e as produções escritas dos alunos nas atividades propostas se constituíram como instrumentos para coleta de dados Ao tratar dos algébricos e transcendentes separadamente, evidenciamos que o conjunto dos irracionais possui uma divisão interna que o difere dos conjuntos dos naturais, inteiros e racionais. Assim, desvelamos tal heterogeneidade epistemológica e alertamos que essa, quando não observada, pode ocasionar dificuldades na aprendizagem dos estudantes na Educação Básica.

**Palavras-chave:** Números irracionais. Números Reais. Formação de professores.

**Abstract**
For more than a century, the academic community has been concerned with the training of Mathematics teachers, which often takes place isolated from the practice of basic school classrooms. When it comes to irrational numbers, the situation is no different. With a view to changing this scenario, we aim, in this experience report, to promote a debate on the content knowledge of irrational numbers, based on the reading of specific texts and a didactic activity with students from a public university. The work was conducted with seventeen students of the subject "Mathematics at School", of which fifteen were undergraduates and two were studying for a bachelor's degree. In two days of intervention, the collaborative observation, and the written productions of the students in the proposed activities were constituted as instruments for data collection. natural, integer and rational.

[1] **lauro.sa@ifes.edu.br**, Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, Instituto Federal do Espírito Santo, Vila Velha/Espírito Santo/Brasil.

[2] **carolinelima@im.ufrj.br**, Mestre em Matemática, Professora do Magistério Superior, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro/Rio de Janeiro/Brasil.

Thus, we unveil such epistemological heterogeneity and warn that this, when not observed, can cause difficulties in student learning in Basic Education.

**Keywords:** Irrational numbers. Real Numbers. Teacher training.

**Resumen**
Desde hace más de un siglo, la comunidad académica se ha preocupado por la formación de profesores de Matemática, que muchas veces se realiza aislada de la práctica de las aulas de la escuela básica. Cuando se trata de números irracionales, la situación no es diferente. Con miras a cambiar este escenario, pretendemos, en este relato de experiencia, promover un debate sobre el conocimiento del contenido de los números irracionales, a partir de la lectura de textos específicos y una actividad didáctica con estudiantes de una universidad pública. El trabajo se realizó con diecisiete alumnos de la asignatura “Matemáticas en la Escuela”, de los cuales quince eran estudiantes de pregrado y dos cursaban estudios de licenciatura. En dos días de intervención, la observación colaborativa y las producciones escritas de los estudiantes en las actividades propuestas se constituyeron como instrumentos para la recolección de datos naturales, enteros y racionales. Así, develamos tal heterogeneidad epistemológica y advertimos que ésta, cuando no se observa, puede ocasionar dificultades en el aprendizaje de los estudiantes de Educación Básica.

**Palabras claves:** Números irracionales. Números reales. Formación de maestro.

## 1 Introdução

Há mais de um século, a comunidade acadêmica tem se preocupado com a formação de professores de matemática, que, muitas vezes, acontece isolada da prática de sala de aula da escola básica. Um importante marco dessa inquietação está na discussão feita por Felix Klein, em sua obra *Matemática elementar de um ponto de vista superior* (Klein, 1908/2016). No Brasil, destacamos, entre outras publicações, os ensaios *O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?* (Fiorentini; Oliveira, 2013) e *Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada* (Giraldo, 2018).

Quando se trata dos números irracionais, a situação descrita acima não é diferente. Autores como Broetto (2016) chegam a apontar a formação de um círculo vicioso no ensino de números irracionais envolvendo a Educação Básica e os cursos de formação inicial de professores de Matemática:

> O egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais → o recém-formado professor sai da licenciatura em matemática sem uma formação que lhe forneça subsídios para ensinar números irracionais de forma adequada na educação básica → o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais... (Broetto 2016, p. 24).

Na perspectiva de romper com esse círculo vicioso, apresentamos uma experiência sobre ensino de números irracionais na licenciatura em Matemática, conduzido por um grupo de seis pesquisadores – uma mestranda e cinco doutorandos. Trata-se de um trabalho final da disciplina de Análise Real, ofertada no segundo semestre de 2019 no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Segundo seu regulamento, o programa busca o aprofundamento e a integração dos saberes pedagógico e de conteúdo em Matemática – entendidos como indissociáveis. Nessa perspectiva, a disciplina de Análise Real, de 60 horas e obrigatória para os cursos de Mestrado e Doutorado, objetiva a formalização de conceitos matemáticos, em diálogo com a sala de aula da Educação Básica e do Ensino Superior.

Neste relato de experiência, objetivamos promover um debate sobre o conhecimento de conteúdo dos números irracionais. Propusemo-nos a responder duas questões[3]: de que Matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber números irracionais para ensiná-los? Que práticas formativas sobre números irracionais podem contribuir para que o futuro professor possa se apropriar desse conteúdo para seu trabalho profissional? Para tanto, realizamos um estudo teórico, vinculado ao conhecimento de conteúdo dos números irracionais, e prático, através de uma atividade com licenciandos de uma universidade pública. Em função do volume de dados coletados e do espaço destinado para escrita do manuscrito, o grupo de pesquisadores se reorganizou em duplas para analisar as diferentes etapas da intervenção. Neste artigo, em especial, apresentamos questões matemáticas acerca dos números irracionais e reflexões pedagógicas referentes aos dois últimos momentos da prática, quando tratamos do Livro Didático (LD) e do trabalho docente na Educação Básica. Antes, porém, ampliamos o debate sobre formação de professores de Matemática.

## 2 Reflexões iniciais sobre formação de professores de Matemática

O aluno de Licenciatura em Matemática enfrenta, no Brasil, situações que podem ser obstáculos em sua formação. No início do Século XX, Félix Klein (1908/2016) relatou o que se chama de dupla descontinuidade, ou seja, não há uma relação adequada entre o que se aprende na escola e o que se aprende na universidade, e vice-versa. Mais de um século depois, ainda pode-se ver essa falta de relação, ao menos, no Brasil. Um dos efeitos desta desconexão sobre os universitários é o fato de se depararem com a seguinte questão: já deveriam ter aprendido na escola um determinado conteúdo matemático, mas esperavam aprender na universidade, enquanto alunos do ensino superior.

Atualmente, as grades curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática não apresentam mais o formato *três mais um*[4], mudança que poderia ser necessária se o modelo ainda estivesse enraizado nos cursos. No entanto, de acordo com Moreira (2012), ainda não há uma integração entre as disciplinas de Matemática e as de Ensino, colocando os dois blocos em posições antagônicas, ainda que as cargas horárias sejam próximas.

Há quem diga que para ser um bom professor de Matemática deve-se ter um conhecimento de matemática pura equivalente ao dos bacharéis, haja vista ser comum estudantes de Licenciatura e Bacharelado compartilharem das mesmas disciplinas. No entanto, entende-se não ser suficiente apenas ter grande domínio de conteúdo (Shulman, 1986). Desta maneira, qual seria a Matemática para a Licenciatura? Fiorentini e Oliveira (2013) respondem esclarecendo que não seria uma Matemática mais leve ou superficial, pelo contrário, profundidade e diversidade enquanto prática social, lugar no qual a Matemática

[3] Tais perguntas serão contextualizadas na seção "*Reflexões iniciais sobre formação de professores de Matemática*" deste artigo.

[4] A partir dos anos 30, o modelo três mais um era o aplicado no Brasil, significam três anos de disciplinas de Matemática e um ano de disciplinas didáticas, com clara desconexão entre esses dois blocos (MOREIRA, 2012).

ocupa devido à relação existente do professor com o mundo, com os sujeitos da escola, consigo, de exploração dos conhecimentos matemáticos etc.

Outro questionamento a ser respondido é: de que forma o conteúdo matemático deveria ser trabalhado nos cursos de formação de professores? De que forma é possível proporcionar uma Matemática diversa e profunda aos graduandos? Na Universidade Federal do Rio de Janeiro, por exemplo, há um programa intitulado Práticas Docentes Compartilhadas – PDC, pelo qual se institucionalizou a possibilidade de professores do ensino básico compartilharem a docência com os professores da Licenciatura, desta forma, os saberes da prática emergentes dessa dinâmica, viabilizam "reflexões sobre a matemática escolar de um ponto de vista acadêmico, assim como sobre a matemática acadêmica de um ponto de vista escolar" (Giraldo *et al,* 2016).

Giraldo (2018) amplia o debate sobre formação de professores que ensinam Matemática, tanto no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, como nos meios profissionais de professores da educação básica. O autor observa uma polarização entre dicotomias capazes de explicar parte considerável dos obstáculos observados no ensino e na aprendizagem: Matemática abstrata *versus* contextualizada; Matemática acadêmica *versus* escolar; conhecimento de Matemática "pura" *versus* conhecimento para o ensino; exposição naturalizada da Matemática *versus* exposição problematizada.

A partir dessa organização, Giraldo (2018) considera que tanto a pesquisa em Educação Matemática como as ações de formação inicial de professores têm mais a se beneficiar da exploração de articulações entre essas dimensões do que do estabelecimento de relações de oposição rígida entre elas. Assim, o pesquisador faz a ressalva que o termo "*versus*" expressa mais uma provocação do que uma concordância.

Particularmente em relação aos números irracionais, Broetto (2016) defende que, se estes forem tratados nas licenciaturas de modo abstrato, formalista e naturalizado, existirá a possibilidade de o futuro-professor não agregar condições para ensiná-los na Educação Básica. Se alinhando ao nosso referencial teórico, o pesquisador aponta que é preciso considerar questões da Matemática Escolar referentes a esse tema na formação dos professores, na qual "a organização dos saberes precisa se dar a partir de uma perspectiva pedagógica e não apenas lógica" (Moreira; Ferreira, 2012, p. 56).

Inspirados por Fiorentini e Oliveira (2013), e considerando as reflexões trazidas por Broetto (2016) e Giraldo (2018), nos propusemos a responder duas questões: *De que matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber números irracionais para ensiná-los? Que práticas formativas sobre números irracionais podem contribuir para que o futuro professor possa se apropriar desse conteúdo para seu trabalho profissional?* Para responder a primeira pergunta, apresentamos uma síntese das discussões realizadas na disciplina de Análise Real da pós-graduação, ampliada a partir de obras específicas sobre o tema. Para a segunda questão, compartilhamos o planejamento e realização de uma experiência com licenciandos em Matemática.

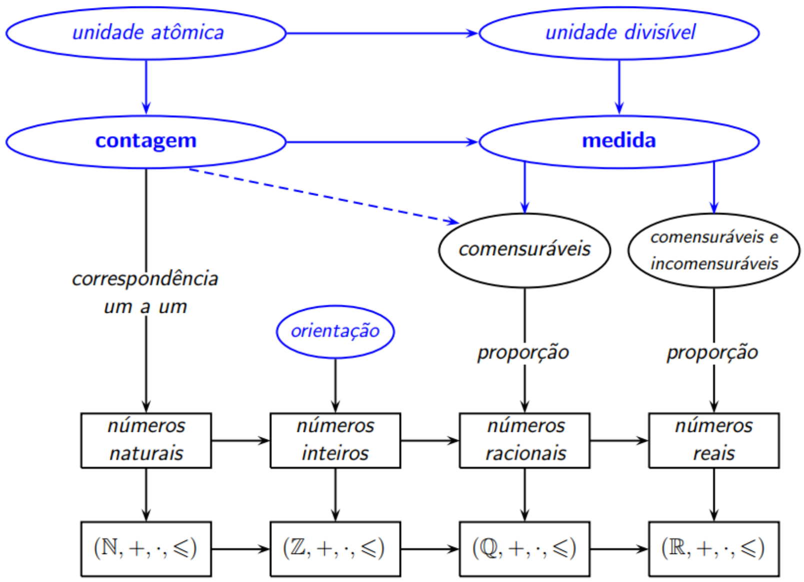
De que Matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber números irracionais para ensiná-los?

O primeiro conjunto numérico a ser estudado na escola é o dos números naturais, importante para a noção de contagem ao fazer correspondência um a um entre os números e os objetos. Tal conjunto é expresso da forma $N = \{0,1,2,3,4,5,6, \dots\}$, cuja notação sugere, por exemplo, que existe um ponto de partida e que o elemento seguinte é formado pela soma de uma unidade ao elemento de referência – processo pode ser feito infinitamente, conforme os Axiomas de Peano (Ripoll; Rangel; Giraldo, 2016).

Ampliando a ideia de número, o conjunto $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos inteiros surge da necessidade de interpretações geométricas que os naturais não supriam. Por meio de propriedades algébricas, especialmente, da presença do elemento simétrico, a noção de orientação da reta é definida. Dando continuidade à ampliação da ideia de número, a próxima expansão chega aos racionais. A construção de $\mathbb{Q}$ se dá, sobretudo, pela noção de medida e por propriedades algébricas munidas da operação de divisão. De acordo com Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), o que diferencia contagem de medida é a forma que a unidade é tratada. Para a contagem, a unidade é indivisível, já para a medida, a unidade pode ser dividida quantas vezes forem necessárias.

O desenvolvimento do conceito matemático de número que propomos é ilustrado pela Figura 1, de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), em que as noções concretas são representadas na cor azul e os conceitos abstratos, na cor preta:

Figura 1 – O conceito de número.



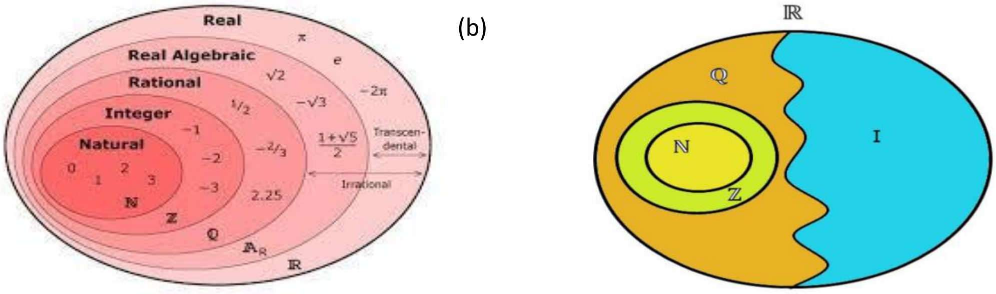

Fonte: Ripoll; Rangel; Giraldo, 2016, p. XXXVI.

Nas passagens de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e, depois, para $\mathbb{Q}$, a ideia de número foi se ampliando por meio de argumentos algébricos capazes de generalizar a diferença dos conjuntos em relação aos anteriores. No entanto, isto não é possível na passagem dos racionais para reais. Neste caso, apesar de lançamos mão de argumentos algébricos, outras premissas de natureza topológica são necessárias. Com isso, desvelamos uma divisão interna dos irracionais, entre os números algébricos (irracionais construídos pelos argumentos algébricos) e os números transcendentes ou transcendentais (formados pelos argumentos topológicos).

Pela distinção entre algébricos e transcendentes, verificamos que os irracionais possuem uma divisão interna que os diferem dos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Ou seja, não há uma homogeneidade epistemológica capaz de definir algebricamente todo o conjunto dos irracionais. Apesar disso, a divisão entre algébricos e transcendentes, explicitada na Figura 2a, passa muitas vezes despercebida na Educação Básica e nos cursos de formação de professores, onde os livros didáticos ilustram os conjuntos numéricos como a figura 2b.

Figura 2 – Diagramas dos conjuntos numéricos.

(a) (b)




Fonte: Imagens retiradas da internet, 2020.

A figura 2b pode garantir aos estudantes e professores uma impressão de que o conjunto dos irracionais é homogêneo, sendo composto por números munidos de propriedades semelhantes. No entanto, com essa heterogeneidade epistemológica existente nos irracionais, as definições, os argumentos e as demonstrações que valem para um número irracional, podem não valer para outro. Ou seja, é preciso ter atenção especial para não tratarmos, por exemplo, $\sqrt{2}$ (algébrico) e π (transcendente) da mesma forma em sala de aula, o que pode dificultar a aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Para explorar mais sobre o conjunto dos números irracionais, apresentamos, a seguir, definições dos números algébricos e transcendentes, além de outras reflexões relativas a esses subconjuntos dos irracionais.

Um número real é dito algébrico quando é solução de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Ou seja, quando é raiz do polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros. De acordo com esta definição, é possível perceber que tanto racionais quanto irracionais podem ser algébricos: se, por um lado, o número 13, racional, é raiz do polinômio $p(x) = x - 13$, por outro, o irracional $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ é raiz de $q(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ (Figueiredo, 2011). De modo particular, temos que todo número racional é algébrico, pois poderá ser escrito como $\frac{b}{a}$, raiz da equação polinomial do primeiro grau $ax - b = 0$. Por contrapositiva, também concluímos que se um número não for algébrico, então não é racional. Além disso, da equação $x^2 - p = 0$, com $p$ primo, concluímos que $\sqrt{p}$ sempre será um irracional algébrico (Figueiredo, 2011).

A demonstração da irracionalidade dos números algébricos é, em geral, realizada por meio de reduções ao absurdo. Como exemplo, tomemos o clássico $n = \sqrt{2}$. Se supormos que *n* seja racional, então existem inteiros positivos *p* e *q*, primos entre si, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Por manipulação algébrica, obtemos a relação $p^2 = 2q^2$. Isto nos fornece a informações que $p^2$ é par, uma vez que ele é o dobro de $q^2$ e o dobro de qualquer número é sempre par. Sendo $p^2$ par, temos que *p* é par e pode ser escrito como $p = 2k$, com k inteiro. Daí, $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ (já que $p^2 = 2q^2$). Neste ponto, concluímos que $q^2 = 2k^2$, que $q^2$ é par e, mais ainda, que $q$

também é par. No entanto, se $p$ e $p$ são pares, eles não podem ser primos entre si, o que contradiz nossa hipótese de que $\sqrt{2}$ seja racional. Portanto, $n = \sqrt{2}$ é um número algébrico e irracional[5].

No caso dos transcendentes, as definições e demonstrações dependem de outros conhecimentos, uma vez que, apesar de também serem irracionais, eles não são raízes de nenhuma equação de coeficientes inteiros. Isso quer dizer que não é suficiente definir os irracionais como "números que não podem ser expressos como fração de dois inteiros", uma vez que nenhum professor da Educação Básica conseguirá mostrar para seus alunos que o número π não pode ser expresso por frações, o que foi feito anteriormente, com o $\sqrt{2}$.

O número π teve sua irracionalidade demonstrada pela primeira vez, possivelmente, pelo francês Lambert, utilizando frações contínuas. Uma demonstração detalhada também é apresentada por Broetto (2016). Já a transcendência do irracional mais popular da Educação Básica se demonstra pelo sofisticado método de Hermite, apresentado em Figueredo (2011). Tais provas evidenciam que, ao contrário dos irracionais algébricos, os números transcendentes não são triviais de serem demonstrados, principalmente na Educação Básica. No caso do π, por exemplo, a constante grega precisa assumir o significado de primeiro número real positivo que anula a função $y = sen(x)$ para, então, ser demonstrada (Broetto, 2016). Ou seja, abandona-se completamente o significado escolar de razão entre comprimento e diâmetro da circunferência, que poderia remeter às frações usadas na demonstração por absurdo da irracionalidade dos algébricos.

Além da ausência de homogeneidade do conjunto dos irracionais, é importante comentarmos a frequente comparação feita entre esse conjunto e os racionais, principalmente no que toca sua potência (popularmente chamada de "tamanho dos conjuntos infinitos"). Hoje, a comunidade de matemáticos já demonstra que todos os números reais transcendentais são irracionais, o que nos leva à densidade desse último conjunto. George Cantor, por exemplo, estudou sistematicamente a potência de conjuntos e demonstrou que os números algébricos possuem a mesma potência dos inteiros. Isto mostrou que são os transcendentes que dão a densidade e que garantem a maior potência dos irracionais.

Na contramão da constatação científica, é recorrente ouvirmos dos alunos que há mais racionais do que irracionais. Creditamos essa falsa impressão principalmente a duas questões: primeiro, é, de fato, mais comum os alunos da Educação Básica operarem com números racionais, que incluem os naturais aprendidos na pré-escola, as frações não inteiras dos anos iniciais do EF e os negativos vistos logo em seguida. Segundo, porque quando apresentados em sala de aula, poucos irracionais são rotulados como tais (provavelmente, apenas o π, a constante de Euler, o número de ouro e algumas raízes recebem esse título em sala de aula). Boa parte dos estudantes ingressa no ensino superior sem perceber que $log2$ e $cos26°$ são, também, números irracionais – inclusive, transcendentes).

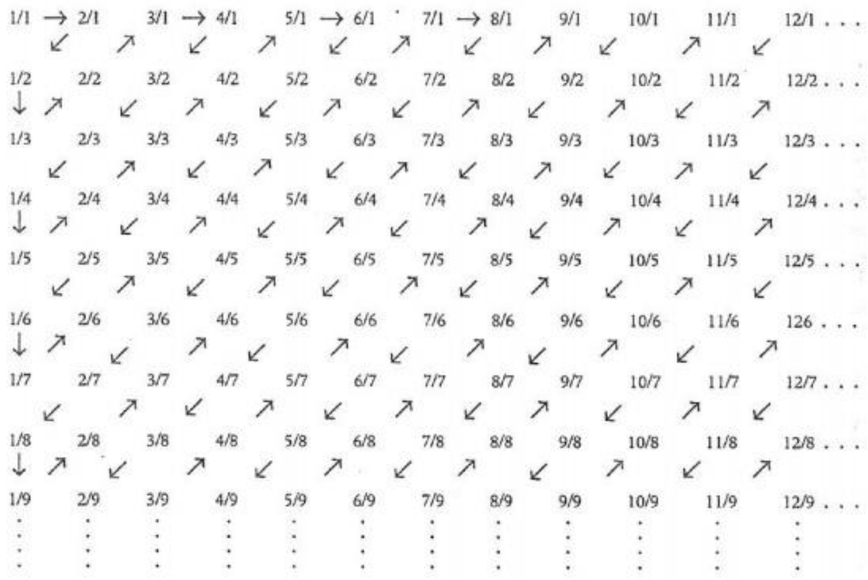
No âmbito da Matemática Universitária, esta discussão de tamanho de conjuntos numéricos acontece por meio da noção de enumerabilidade, que pressupõe que um conjunto X se diz enumerável quando existir uma função bijetiva $f: N \to X$, ou seja, quando houver uma correspondência biunívoca com os números naturais. Uma das formas de se mostrar a enumerabilidade de $Q$ é a partir de um esquema de diagonais, construído por George Cantor,

[5] Outras formas de demonstrar a irracionalidade de algébricos, como o $\sqrt{2}$, são apresentados no Apêndice B de Broetto (2016).

ISSN 2357-724X DOI: http://dx.doi.org/10.5965/2357724X112023e0009

pelo qual é possível fazer uma relação biunívoca entre os números naturais e as frações, conforme ilustra a figura 4.

Figura 4 – Prova de Cantor para enumerabilidade dos racionais.




Fonte: ACZEL, 2003, p. 104.

Conforme ilustrado em Broetto (2016), para os números irracionais, Cantor desenvolveu uma estratégia semelhante ao esquema de diagonais. Ao escolher o intervalo (0,1), Cantor assumiu, por hipótese, que era possível determinar todos os números irracionais contidos no intervalo, mesmo que fora de ordem. Ao organizá-los em uma lista verticalmente, determinou um novo número formado a partir da diagonal substituindo cada algarismo pelo seu sucessor (no caso do 9, troca-se pelo zero).

0,38662546...
0,27454749...
0,11186400...
0,97534228...

Desta forma, do número 0,3713..., obtém-se o 0,4824...., que não estava originalmente na lista, já que difere dos demais em pelo menos um algarismo. Assim, por contradizer a hipótese, concluímos que os irracionais são não enumeráveis. Mais ainda, apesar de encontrarmos mais racionais do que irracionais, sabe-se que a maior parte dos números existentes são do segundo conjunto (Broetto, 2016).

Com as discussões apresentadas nesta seção, alertamos que definições, argumentos e demonstrações que valem para um irracional, podem não valer para outro, o que pode gerar dificuldades na aprendizagem dos jovens da Educação Básica. E é dessa Matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber números irracionais para ensiná-los. Por isso, mais uma vez, reafirmamos a necessidade de uma formação de professores de Matemática com vistas à prática de sala de aula da escola básica, o que detalharemos na próxima seção.

## 3 Que práticas formativas sobre números irracionais podem contribuir para que o futuro professor possa se apropriar desse conteúdo para seu trabalho profissional?

Nesta seção, compartilhamos o planejamento e validação de uma atividade sobre números irracionais com licenciandos em Matemática – a qual poderá contribuir para que o futuro professor se aproprie desse conteúdo para seu trabalho profissional, conforme provocação de Fiorentini e Oliveira (2013). O trabalho foi realizado em uma turma de Licenciatura em Matemática. O curso é ofertado nos turnos integral e noturno. Ele está sediado em um instituto que abriga, além da Licenciatura, outros seis cursos de graduação. Dessa forma, é possível que alunos cursem, como optativas, disciplinas nos demais cursos.

O trabalho foi realizado com dezessete alunos da disciplina "Matemática na Escola", que trata diretamente de questões em torno do ensino, abordando a discussão do conteúdo matemático desenvolvido no EF e no EM, inclusive. Por ser um componente curricular que não possui pré-requisito, estudantes de períodos diferentes compunham a turma, variando do segundo ao sexto. Dos dezessete alunos matriculados na disciplina, um era estudante do Bacharelado em Matemática e outra do Bacharelado em Ciências Matemáticas e da Terra. Isto porque é comum, na instituição, alunos dos bacharelados cursarem componentes da Licenciatura para, depois, migrarem este curso.

A intervenção aconteceu em dois encontros do mês de outubro de 2019, que, juntos, totalizaram 6 horas. Em ambos os dias, a observação colaborativa e as produções escritas dos alunos nas atividades propostas se constituíram como instrumentos para coleta de dados, conforme sugerem Moreira e Caleffe (2008) ao apresentar uma metodologia da pesquisa para professores-pesquisadores.

Em relação à observação, adotamos o formato colaborativo defendido por Ibiapina (2008, p. 90) ao evidenciar que "é um procedimento que faz a articulação entre ensino e pesquisa, teoria e prática, bem como possibilita o pensar com professores em formação sobre a prática pedagógica no próprio contexto de aula". Segundo a pesquisadora, "a observação colaborativa inicia pela observação de aulas em contextos escolares esse procedimento constrói momentos reflexivos que permitem a formação e o desenvolvimento de uma prática pedagógica mais autônoma" (Ibiapina, 2008, p. 90). Esse formato de observação contempla descrição, interpretação, confronto e reconstrução de teorias e práticas relativas ao processo de ensino-aprendizagem. "A teoria é construída na prática e a prática revitaliza a teoria" (Ibiapina, 2008, p. 92). Esse modelo inclui três fases: pré-interpretação, intervenção e pós-intervenção.

## 4 Planejamento e realização da atividade

No momento de pré-intervenção, acompanhando nossos pressupostos teóricos (Klein, 1908/2016; Fiorentini; Oliveira, 2013; Broetto, 2016; Broetto; Santos-Wagner, 2017; Giraldo, 2018), planejamos a atividade em seis momentos, organizados no movimento Escola-Universidade-Escola para, assim, tentarmos superar a dupla descontinuidade de Klein (1908/2016):

1. Retomamos algumas experiências dos licenciandos enquanto alunos da Escola Básica, a partir de perguntas diagnósticas adaptadas de Broetto e Santos-Wagner (2017). Com isso, rompemos com a primeira descontinuidade de Klein (1908/2016) que supõe que "ao

ingressar na universidade, o futuro professor devesse 'esquecer' toda a matemática que aprendeu até então na escola básica" (Giraldo, 2018, p. 37);

2. focalizamos os irracionais enquanto conjunto numérico para discutir sua popular representação por meio do Diagrama de Venn. Nesse momento, discutimos brevemente questões relacionadas à enumerabilidade, densidade e complementariedade dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais;
3. problematizamos a irracionalidade de$\sqrt{2}$, estendendo o debate conceitual para os demais números irracionais algébricos;
4. problematizamos a irracionalidade de π, estendendo o debate conceitual para os demais os números irracionais transcendentes;
5. retornamos nossos olhares para a Educação Básica, promovendo um debate sobre a apresentação dos irracionais nos LD dos anos finais do Ensino Fundamental (EF) e, também, de obras para o Ensino Médio (EM);
6. situamos os licenciandos na condição de professores e suscitamos reflexões acerca do ensino de números irracionais, superando a segunda descontinuidade de Klein (1908/2016) cuja prerrogativa era que "ao terminar a graduação, o professor devesse novamente 'esquecer' toda a Matemática ali aprendida para se iniciar na carreira docente (Giraldo, 2018, p. 37).

Em relação à intervenção e pós-intervenção, apresentaremos, neste manuscrito, observações e reflexões relativas às etapas 5 e 6 da intervenção. No quinto momento, cientes das especificidades do conhecimento matemático para o ensino (Giraldo, 2018), propusemos aos licenciandos, uma análise de trechos de LD de diferentes épocas e que tratavam dos irracionais[6], observando os seguintes elementos:

Tabela 1: Etapa 5.

| |
|---|
| *5.1) Como o livro didático define os números irracionais? Como você avalia essa abordagem?*<br>*5.2) Quais números irracionais abordados no livro são reais algébricos? Como a obra justifica tal irracionalidade e como você avalia essa discussão?*<br>*5.3) Quais números irracionais abordados no livro são transcendentais? Como a obra justifica tal irracionalidade desse(s) número(s) e como você avalia essa discussão?*<br>*5.4) Compare a definição de número irracional apresentado pelos livros e a justificativa para a irracionalidade dos números √2 e π. Há coerência na argumentação proposta pelo livro?* |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Já no sexto (e último) momento da atividade, voltamos os olhares para a formação do professor de Matemática, questionando aos alunos:

[6] Foram entregues aos alunos excertos de LD de Matemática do EF e do EM: *A conquista da matemática*, v. 7 (Giovanni, Castrucci, Giovanni Jr, 1998), *Praticando a Matemática*, v. 8 (Andrini; Vasconcelos, 2012), *Matemática do cotidiano*, v. 9 (Bigode, 2015), *Matemática - ideias e desafios*, v. 8 (Mori; Onaga, 2015), *Matemática - contexto & aplicações*, v. 1 (Dante, 2016), *Matemática - ciência e aplicações*, v. 1 (Iezzi *et al*, 2016).

Tabela 2: Etapa 6.

| |
|---|
| *6.1) Que abordagens sobre os Irracionais os professores do seu curso de graduação utilizaram?*<br>*6.2) Baseado no item (6.1), você se sente preparado para trabalhar esse assunto na escola?*<br>*6.3) Independente da sua resposta do item anterior, qual seria sua abordagem para o ensino básico?* |

Fonte: Elaborado pelos autores.

## 5 Reflexões sobre a experiência de ensino

Sabemos que, para atender às recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para Matemática sobre os números irracionais, os LD deveriam proporcionar ampliação e aprofundamento, tendo em vista o conhecimento com números naturais e racionais positivos trabalhados nos anos iniciais (Brasil, 1998; 2000). Em relação à Base Nacional Comum Curricular de Matemática para o Ensino Fundamental, há uma habilidade que sugere que o estudante seja capaz de "reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica" (Brasil, 2017, p. 317).

Apesar dessas recomendações, nem todos os LD promovem este tipo de abordagem. Embora essa defasagem seja denunciada nas avaliações especializadas do Guia do Plano Nacional do Livro Didático (Brasil, 2014), entendemos que tais análises das obras precisam sempre ser complementadas com o olhar do professor de sala de aula, que conhece o currículo e os alunos (Shulman, 1986). Foi nessa perspectiva que realizamos o quinto momento da nossa intervenção.

A primeira tarefa (5.1) questionava os alunos sobre como o trecho do LD entregue definia os números irracionais e como eles avaliavam essa abordagem. Nas obras do EF, os licenciandos observaram que havia definições do tipo "números que não podem ser representados na forma fracionária" e na forma "números cuja representação decimal é sempre infinita e não periódica". Já no EM, prevaleceram, de acordo com os estudantes, as definições do segundo tipo. Ao analisar a razoabilidade das definições, observamos que muitos argumentos foram pautados na etapa de escolaridade dos excertos dos LD, o que nos permite inferir que, nestes momentos, os alunos não construíram ou mobilizaram somente *conhecimentos de Matemática pura*, mas também *conhecimentos matemáticos para o ensino* entendido como *conhecimento pedagógico de conteúdo* (Shulman, 1986).

Nos dois itens seguintes, (5.2) e (5.3), perguntamos quais números irracionais abordados no LD eram reais algébricos e transcendentais. Nos mesmos itens, provocamos os alunos a observarem como as obras justificavam tal irracionalidade.

Independentemente do nível de escolaridade, no caso dos reais algébricos, os excertos analisados lançaram mão de exemplos pontuais, generalizavam para raízes quadradas de números primos ou de números que não eram quadrados perfeitos. Apenas uma obra do EM citou raízes de índice maior que dois, o que amplia a noção de números irracionais para além das raízes quadradas. No EF, quando apresentadas, as justificativas para a irracionalidade eram baseadas na expansão decimal dos números, associada à sua posição na reta real. Neste aspecto, foi curioso observar a reação dos licenciandos ao notarem que muitas obras não explicavam por que as representações decimais eram infinitas e, mais ainda, não periódicas.

Já no EM, a justificativa para a irracionalidade dos reais algébricos se deu, sobretudo, na demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ por absurdo.

Segundo análise dos licenciandos da UFRJ, algumas obras do EF não citaram números transcendentes e outras mencionaram apenas o π. Já no EM, apareceram, também, variações do tipo π+1, o número de ouro (ϕ) e números com representação finita e não periódica (como *0,1011011101111*...). Entre as obras que citaram o π como número irracional, tanto no EF quanto no EM, a discussão se enveredou por dois caminhos: (a) experimentos práticos de divisão do comprimento da circunferência pela medida do seu diâmetro, que supostamente resultariam em números decimais e não periódicos; e (b) referências à História da Matemática. Sobre a estratégia (a), é importante considerar:

> O que se pretende mostrar com a realização desse tipo de experiência – que a razão entre o comprimento e o diâmetro de objetos circulares é uma constante irracional – traz consigo duas dificuldades intrínsecas. A primeira é mostrar que se trata de uma constante, pois, para cada objeto utilizado, a medida obtida é ligeiramente diferente. A segunda dificuldade é mostrar que é irracional, já que qualquer instrumento de medida sempre fornecerá um número racional para o comprimento e para o diâmetro dos objetos, obtendo-se assim um quociente de números racionais, que é um número racional (Broetto, 2016, p. 34).

Em relação à estratégia (b), os alunos a avaliaram como "boa, mas não convincente". Isto porque, em sua formação, há um discurso que o convencimento, em todos os níveis, passa por uma demonstração. Tais enunciações são orientadas pelo paradigma de *exposição naturalizada*, que assumem que, "como a matemática é vista como uma 'ciência do rigor', seu ensino deve ser 'rigoroso'" (Giraldo, 2018, p. 41). Na verdade, a estratégia (b) do LD pressupõe uma formação problematizada do professor, a qual "inclui tanto os processos históricos de produção de conhecimento, que levaram às formas como a matemática está estabelecida hoje, como os processos de produção e mobilização de saberes nos contextos sociais escolares" (*ibidem*).

Na questão (5.4), buscamos discutir com os licenciandos a importância da coerência entre definição e exemplos. Em alguns casos, os excertos dos livros definiam os irracionais com referência à representação fracionária, mas justificavam os exemplos por meio da expansão decimal – isto, sem que as duas representações fossem associadas. Além disso, quando tratavam do π, os trechos sugeriam uma estratégia empírica de determinar seu valor pela divisão do comprimento da circunferência pela medida do diâmetro. Ora, como pode π ser resultado de uma divisão se todo número irracional não pode ser expresso em forma de fração? Assim como Broetto (2016), não defendemos que esta estratégia não seja adotada, apenas ressaltamos suas implicações na construção do conceito de número irracional.

Ao final deste quinto momento, os licenciandos observaram nos excertos de livros do EF as fragilidades já mencionadas. Nas obras do EM, os futuros professores viram que é possível abordar os irracionais de modo acessível e com algumas demonstrações, o que nem sempre acontece nos LD. Ao chegarmos a essas conclusões, já situamos os licenciandos na condição de professores e suscitamos reflexões acerca do ensino de números irracionais, superando a segunda descontinuidade de Klein (1908/2016). Assim, demos encaminhamento ao último momento da nossa intervenção.

Na seção 6, estávamos interessados em saber se o curso de ensino superior, até o momento, havia contribuído para a consolidação do tema proposto e para a formação dos futuros docentes, ou seja, se a universidade havia dado continuidade ao aprendido na escola.

A primeira questão estava interessada nas possíveis abordagens sobre Irracionais utilizadas pelos professores universitários dos estudantes participantes. Uma aluna, que estava cursando, no mesmo período, a disciplina Fundamentos de Aritmética e Álgebra informou que o assunto estava em andamento. Dois alunos relataram ter visto de modo formal e abstrato durante a construção dos números reais, na disciplina de Análise Real. Os demais alunos, os que se encontravam no início do curso de Licenciatura, relataram que não lembravam ou ainda não tinham visto o assunto na universidade.

Em seguida, no item (6.2), os alunos foram questionados quanto ao fato de se sentirem preparados para ensinar esse assunto na escola, baseados nas abordagens do item anterior. O fato de poucos terem vivenciado experiências com irracionais na universidade levou, a maioria dos alunos, a responder que não se sentiam preparados ainda, alguns demostraram expectativa em aprender mais sobre números irracionais em outra disciplina do curso. Ou seja, diferente do que Klein (1908/2016) expôs, os alunos acreditavam na existência da continuidade universidade-escola. Dos alunos que cursaram Análise Real, citados na questão anterior, um respondeu que se sentia preparado e, o outro, não. No entanto, ambos tinham o consenso de que não ensinariam da mesma forma que viram na Universidade, o que nos remete aos *saberes pedagógicos* emergentes nos alunos. Dos demais alunos, apenas um se disse preparado para abordar o assunto, tomando cuidado de preparar “bem” as aulas com bons exemplos e exercícios.

Em (6.3), mesmo diante da falta de experiências vividas na universidade em relação ao assunto em questão, foi perguntado aos alunos, independente das respostas dadas em (6.2), quais abordagens utilizariam para ensinar Irracionais no Ensino Básico. Um terço da turma respondeu que usaria demonstrações para abordar o assunto. Dois alunos responderam utilizar os exemplos do $\sqrt{2}$ e $\pi$ para abordar Irracionais. Cinco estudantes buscariam exemplos geométricos, apesar de não informar quais seriam esses exemplos. Houve quem falasse sobre a infinitude dos irracionais, da comensurabilidade e dos números reais algébricos e transcendentes. Dois alunos disseram que após terem participado das questões anteriores à seção 6, deste trabalho, buscariam ferramentas físicas para definir o conjunto dos Irracionais, sempre levando em consideração o nível escolar dos alunos, surgindo mais uma vez o *conhecimento pedagógico de conteúdo* (Shulman, 1986). Os demais alunos deram respostas curtas, como apenas *sim* e *não*, ao dizerem que usariam exemplos para abordar o assunto.

## 6 Considerações finais

Neste artigo, compartilhamos uma investigação sobre números irracionais com foco na formação inicial do professor de Matemática. Objetivamos promover um debate sobre o conhecimento de conteúdo dos números irracionais e nos propusemos a responder duas questões: de que Matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber números irracionais para ensiná-los? Que práticas formativas sobre números irracionais podem contribuir para que o futuro professor possa se apropriar desse conteúdo para seu trabalho profissional?

Em relação à primeira pergunta, entendemos que o conhecimento matemático contribui para que o professor perceba, na distinção entre algébricos e transcendentes, que definições, argumentos e demonstrações que valem para um número irracional, podem não valer para outro - o que pode gerar dificuldades na aprendizagem dos alunos da Educação Básica. Sobre esse aspecto, não defendemos que algébricos e transcendentes sejam ensinados separados e, tampouco, de modo rigoroso na Educação Básica. Pelo contrário, ao tratar dos subconjuntos numéricos separadamente, procuramos mostrar para os licenciandos que o conjunto dos irracionais possui uma divisão interna que o difere dos naturais, inteiros e racionais. Assim, é preciso ter atenção especial na atividade docente e não tratar números algébricos e transcendentes da mesma forma.

Sobre a segunda pergunta, apontamos uma possibilidade de prática formativa sobre números irracionais que pode contribuir para que o futuro professor possa se apropriar desse conteúdo para seu trabalho. A atividade relatada neste artigo, por exemplo, combinou discussões de conteúdo específico e análise de livros didáticos da Educação Básica. Apesar disso, cabe destacar que outros fatores que se fazem importantes para a formação de professores acerca dos números irracionais, como fatos históricos, atividades didáticas e erros frequentes dos alunos, foram planejados para os demais momentos da intervenção. No entanto, conforme anunciamos na introdução, neste manuscrito, optamos por apresentar somente reflexões relativas às etapas 5 e 6 da experiência.

Ao longo da intervenção realizada, observamos a influência da formalidade que as disciplinas específicas de Matemática têm sobre os alunos, pois muitos deles afirmaram que usariam este tipo de abordagem para falar de números irracionais no Ensino Básico. Com isso, se materializa a desconexão existente entre universidade e escola, que forma professores que não se sentem preparados para lecionar números nos Ensinos Fundamental e Médio. Mais do que isso, há expectativas ainda em aprender o que não se foi bem compreendido no Ensino Básico, ou seja, os alunos, em especial os que estão no início do curso, esperam que as lacunas existentes sejam sanadas pelo conteúdo do Ensino Superior. Nota-se ainda que os itens anteriores à seção 6, os exemplos e as discussões apresentadas contribuíram para as possíveis abordagens a serem tomadas enquanto futuros professores. Com isso, concluímos que a realização dessa atividade proporcionou uma reflexão nos alunos que a Matemática Universitária e a Matemática Escolar possuem características próprias que precisam ser consideradas no itinerário formativo do professor.

**Agradecimentos**

Registramos aqui nossa gratidão aos dezessete estudantes que participaram da experiência e reconheceram a importância dessa ação para sua formação inicial e para a pesquisa em Educação Matemática. Agradecemos, também, aos colegas de pesquisa, com os quais elaboramos a atividade que foi parcialmente analisada neste artigo

**Referências**

ACZEL, Amir. **O mistério do Alef**: a Matemática, a Cabala e a procura pelo infinito. São Paulo: Globo, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos - PNLD 2015**: matemática, ensino médio. Brasília: MEC/SEB, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB. 2017.

BROETTO, Geraldo Cláudio. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. 417 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BROETTO, Geraldo Cláudio; SANTOS-WAGNER; Vania. Maria Pereira dos. **Números irracionais para professores (e futuros professores) de Matemática.** Vitória, ES: Edifes, 2017.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de C. C. de. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, Dez. 2013. Disponível em: <http://ref.scielo.org/339xrc>. Acesso em: 07 Jul. 2019.

GIRALDO, Victor. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. **Ciência e Cultura**, São Paulo, v. 70, n. 1, p. 37-42, Jan. 2018. Disponível em: <http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0009-67252018000100012>. Acesso em: 07 Ago. 2019.

GIRALDO, Victor; MENEZES, Fábio; MANO, Vinicius; QUINTANEIRO, Wellerson; RANGEL, Letícia; MELO, Lucas; MATOS, Diego; DIAS, Ulisses; MOUSTAPHA, Bruna; NETO, Cleber Costa. Práticas docentes compartilhadas: Integrando saberes emergentes da prática na formação inicial de professores de matemática. In: CYRINO, M. C. A. C. (Org). **Temáticas Emergentes de Pesquisas Brasileiras sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: Desafios e Perspectivas*.* Brasília: SBEM, 2016.

IBIAPINA, Ivana Maria Lopes de Melo. **Pesquisa colaborativa***:* investigação, formação e produção de conhecimentos. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

KLEIN, Felix. **Elementary mathematics from a higher standpoint.** Traduzido por Schubring, G; Menghini, M; Baccaglini-Frank, A. Berlin: Springer, 1908/2016.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da Pesquisa para o professor pesquisador**. 2ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. 3+1 e suas (in)variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em matemática. **Bolema***,* Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n44/03.pdf>. Acesso em 03 mai. 2023.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. O que é número real? Os números reais na formação do professor de matemática. In: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (Org.). **Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: IPR, 2012. p. 49-94.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica**: números inteiros. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2. fev., 1986, p. 4-14.